سیگنال ها و سیستم ها
سیگنال ها

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی در علوم پایه زنجان

سیگنال

نمایشی کمیتی فیزیکی و تغییرات آن

- به صورت تابعی از یک یا چند متغیر مستقل
- متغیر مستقل معمولا زمان

انواع سیگنال

- پیوسته $x(t)$
- گسسته $x[n]$
  - t و n متغیرهای مستقل و x متغیر وابسته یا تابع
  - دنبالهٔ زمان‌گسسته
- سیگنال دیجیتال

- انواع سیگنال پیوسته
  - تصادفی
  - معین
- سیگنال گسسته
  - حاصل نمونه‌برداری
  - ذاتا گسسته

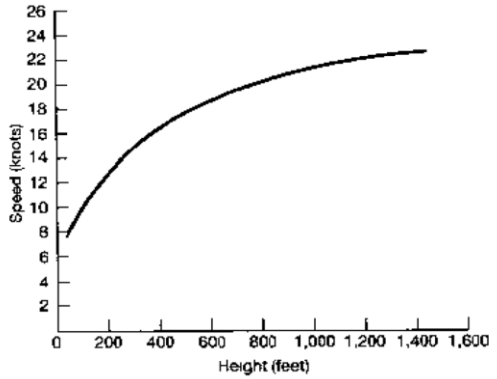


Figure 1.5 Typical annual vertical wind profile. (Adapted from Crawford and Hudson, National Severe Storms Laboratory Report, ESSA ERLTM-NSSL 48, August 1970.)

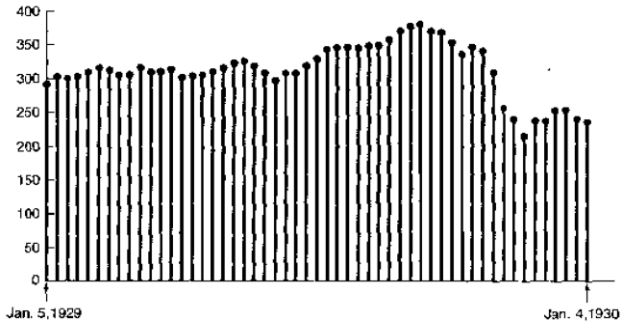


Figure 1.6 An example of a discrete-time signal: The weekly Dow-Jones stock market index from January 5, 1929, to January 4, 1930.

دسته‌بندی بر مبنای متغیر مستقل

زمان

- پیوسته
- گسسته

تعداد

- یک بعدی
- دوبعدی
- سه بعدی و بیشتر

سیگنال زوج و فرد

زوج

- $x(-t) = x(t)$
- $x[-n] = x[n]$

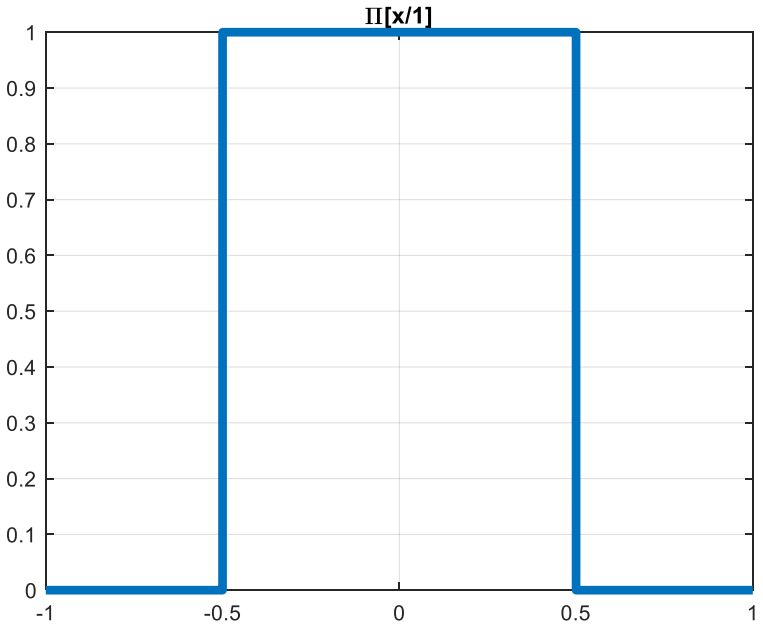
سیگنال زوج و فرد

زوج

- $x(-t) = x(t)$
- $x[-n] = x[n]$

فرد

- $x(-t) = -x(t)$
- $x[-n] = -x[n]$



سیگنال زوج و فرد

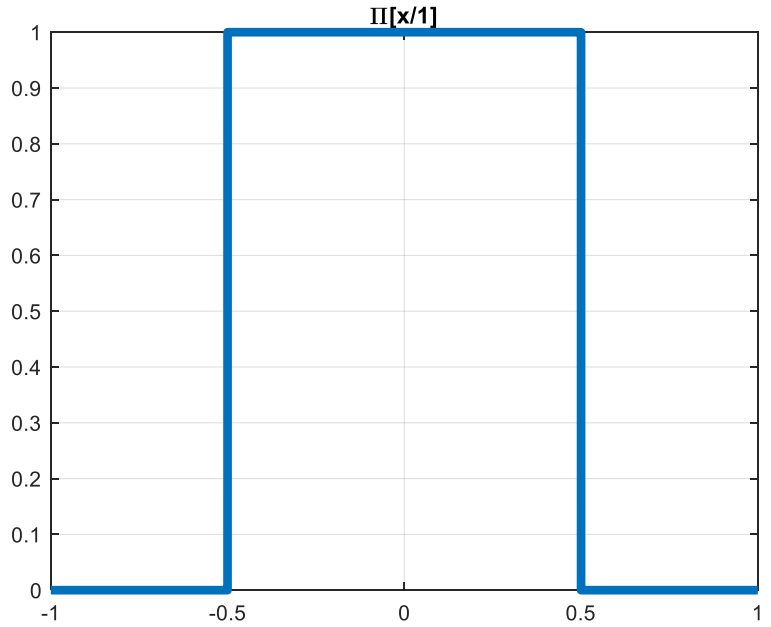
زوج

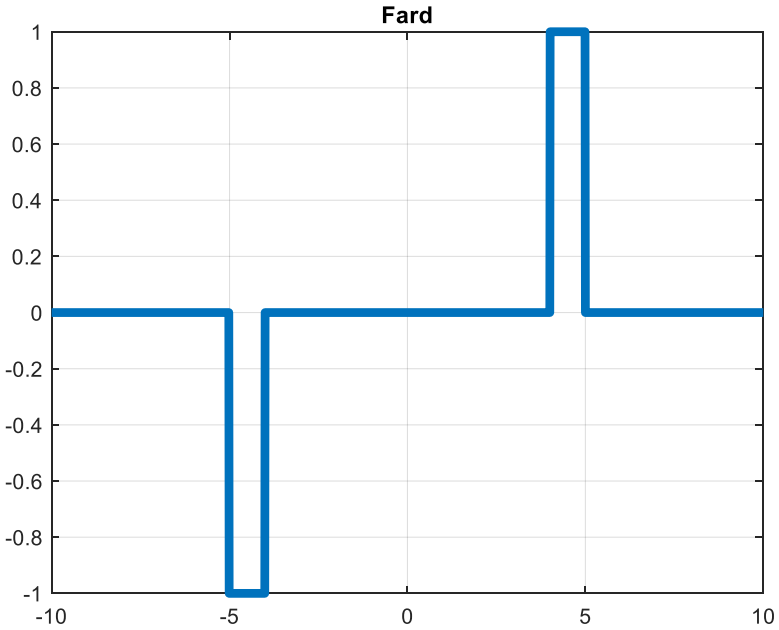
- $x(-t) = x(t)$
- $x[-n] = x[n]$

فرد

- $x(-t) = -x(t)$
- $x[-n] = -x[n]$

- مثال سیگنال مستطیل(پی) Π





سیگنال زوج و فرد

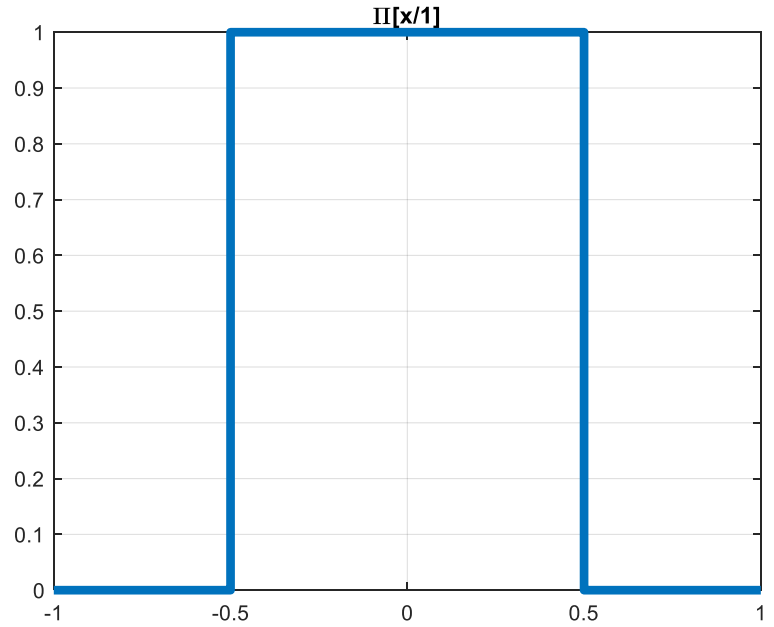
زوج

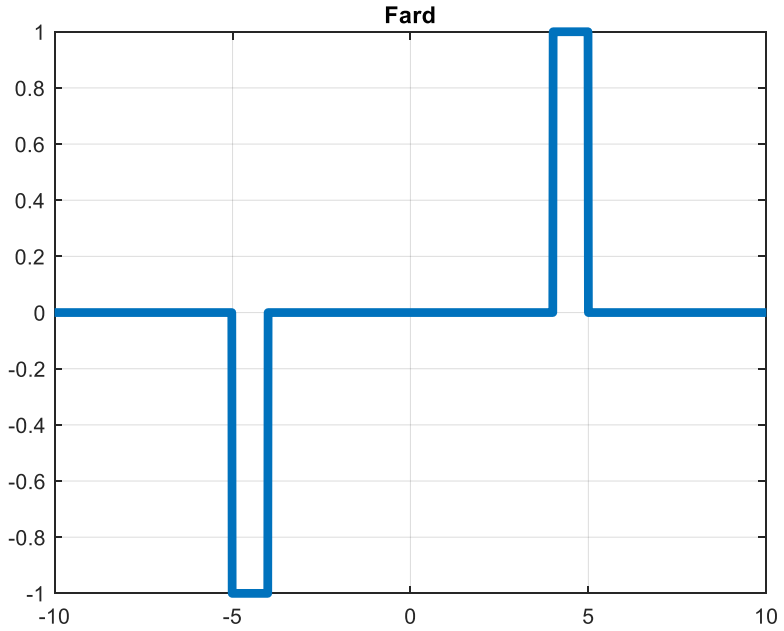
- $x(-t) = x(t)$
- $x[-n] = x[n]$

فرد

- $x(-t) = -x(t)$
- $x[-n] = -x[n]$

- مثال سیگنال مستطیل(پی) Π





سیگنال زوج و فرد

زوج

- $x(-t) = x(t)$
- $x[-n] = x[n]$

فرد

- $x(-t) = -x(t)$
- $x[-n] = -x[n]$

- مثال سیگنال مستطیل(پی) Π
- نتیجه
  - مقدار هر سیگنال فرد گسسته در مبدا مختصات برابر صفر
  - امکان نوشتن هر سیگنال دلخواه به صورت مجموع دو سیگنال زوج و فرد
  - تمرین

سیگنال متناوب

تکرار الگوئی در بازه‌های زمانی

بدون تغییر ماندن مقدار سیگنال با جابجائی به اندازهٔ T

- $x(t) = x(t+T) = x(t+kT), \omega_0 = ۲\pi f = \frac{۲\pi}{T}, k \in \mathbb{Z}$
- $x[n] = x[n+N] = x[n+kN], \Omega_0 = ۲\pi f = \frac{۲\pi}{T}, k \in \mathbb{Z}$

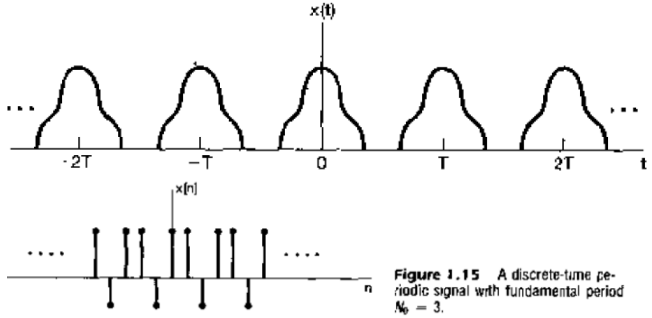


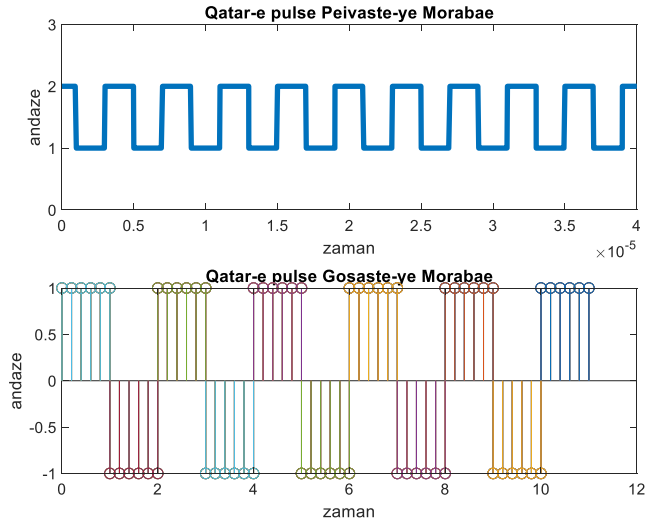
Figure 1.14 A continuous-time periodic signal

Figure 1.15 A discrete-time periodic signal with fundamental period $N_0 = 3$.

تناوب اصلی

- کوچکترین دوره تناوب مثبت
- در ارتباط با بسامد (فرکانس) اصلی

مثال- قطار پالس



سیگنال متناوب

مثال- بررسی متناوب بودن سیگنال زیر

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t), t < 0 \\ \sin(t), t \geq 0 \end{cases}$$

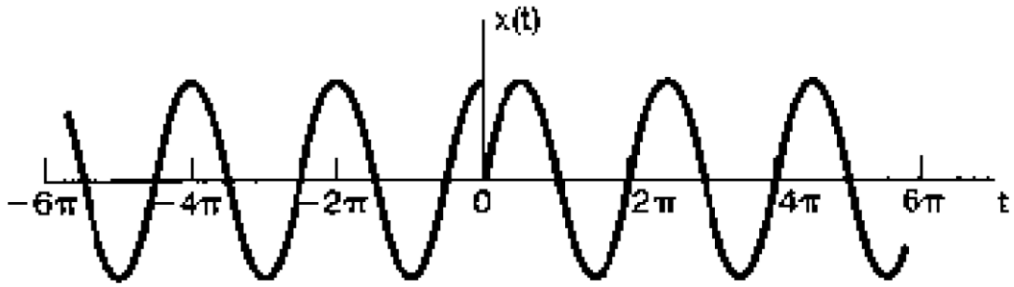


Figure 1.16 The signal $x(t)$ considered in Example 1.4.

سیگنال‌های انرژی و توان

انرژی

- متناوب پیوسته $x(t) = x(t+T)$

$$E = \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- نامتناوب پیوسته

$$E = \lim_{T\to\infty} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- سیگنال انرژی موجود است اگر انرژی محدود باشد

$$E < \infty$$

انرژی

- متناوب گسسته $x[n] = x[n+N]$

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

- نامتناوب گسسته

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2$$

سیگنال‌های انرژی و توان

توان

- متناوب پیوسته $x(t) = x(t+T)$

$$P = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- نامتناوب پیوسته

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} |x(t)|^2 dt$$

- سیگنال توان موجود است اگر توان محدود باشد

$$P < \infty$$

توان

- متناوب گسسته $x[n] = x[n+N]$

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2$$

- نامتناوب گسسته

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N} |x[n]|^2$$

سیگنال‌های انرژی و توان

بنابراین سه دسته سیگنال

انرژی محدود یا $p_\infty = 0$

- $x(t) = \begin{cases} ۱,0 \le t \le ۱ \\ 0,\text{غیره} \end{cases}$

توان محدود $p_\infty < \infty$

- $x[n] = ۴$

توان نامحدود $p_\infty \to \infty$

- $x(t) = t$

عملیات روی متغیر وابسته

ضرب عددی	$y(t) = \alpha x(t)$	$y[n] = \alpha x[n]$
جمع	$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$	$y[n] = x_1[n] + x_2[n]$
ضرب	$y(t) = x_1(t)x_2(t)$	$y[n] = x_1[n]x_2[n]$
مشتق	$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$y[n] = x[n] - x[n-1]$
انتگرال	$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m]$

چند عملیات روی متغیر مستقل

جابجائی زمانی (شیفت)

- $y(t) = x(t - t_0)$
- $y[n] = x[n - n_0]$

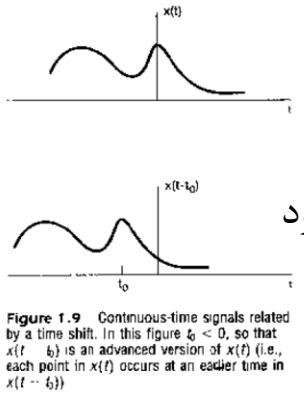


Figure 1.9 Continuous-time signals related by a time shift. In this figure $t_0 < 0$, so that $x(t - t_0)$ is an advanced version of $x(t)$ (i.e., each point in $x(t)$ occurs at an earlier time in $x(t - t_0)$).

- چپ $t_0 < 0$
- $x(t)$ به چپ جابجا می‌شود
  - زمانا زودتر (جلوتر) از $x(t)$

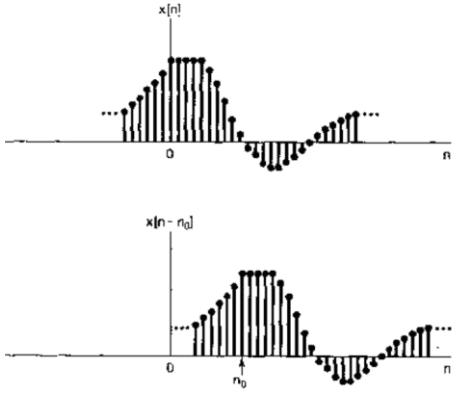


Figure 1.8 Discrete-time signals related by a time shift. In this figure $n_0 > 0$, so that $x[n - n_0]$ is a delayed version of $x[n]$ (i.e., each point in $x[n]$ occurs later in $x[n - n_0]$).

- راست $t_0 > 0$
- $x(t)$ به راست جابجا می‌شود
  - زمانا دیرتر(عقب‌تر) از $x(t)$

چند عملیات روی متغیر مستقل-جابجائی زمانی

مثال

- با جابجایی می‌توان سیگنالی را زوج یا فرد کرد
- کاربرد استفاده از چند گیرنده

چند عملیات روی متغیر مستقل-انعکاس زمانی

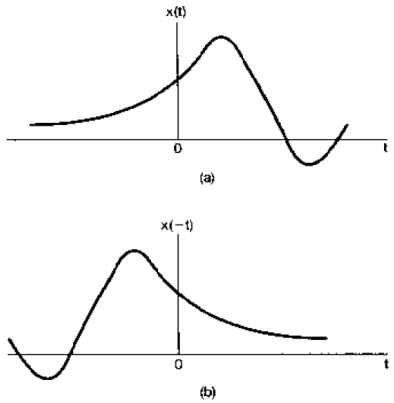


Figure 1.11 (a) A continuous-time signal $x(t)$; (b) its reflection $x(-t)$ about $t = 0$.

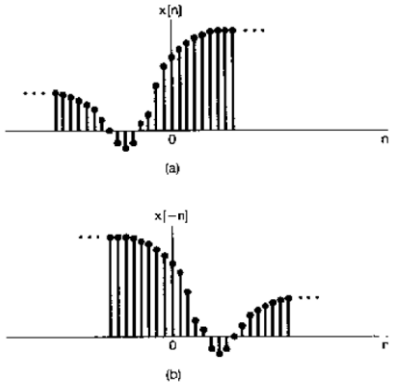


Figure 1.10 (a) A discrete-time signal $x[n]$; (b) its reflection $x[-n]$ about $n = 0$.

انعکاس یا وارون زمانی

- $y(t) = x(-t)$
- $y[n] = x[-n]$
- انعکاس نسبت به محور قائم

- وارون زمانی سیگنال زوج ← زوج
- وارون زمانی سیگنال فرد ← $-x[n]$

چند عملیات روی متغیر مستقل- مقیاس زمانی

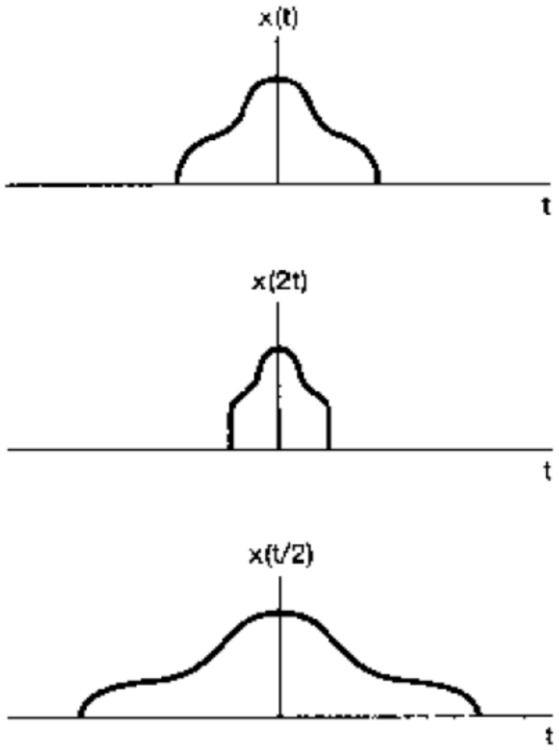


Figure 1.12 Continuous-time signals related by time scaling.

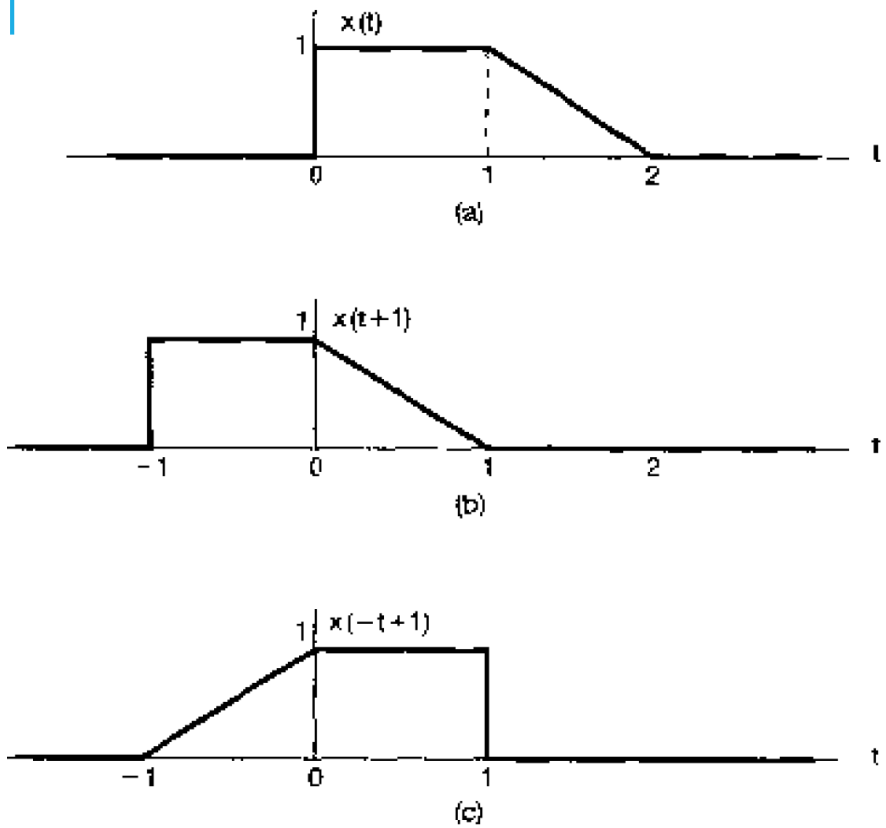
مقیاس زمانی

- $y(t) = x(at)$
- $y[n] = x[kn]$
- شهود **x(t)** نوار کاست باشد آنگاه
  - $x(۲t)$ همان نوار با سرعت دو برابر
  - $x(\frac{t}{۲})$ همان نوار با سرعت نصف

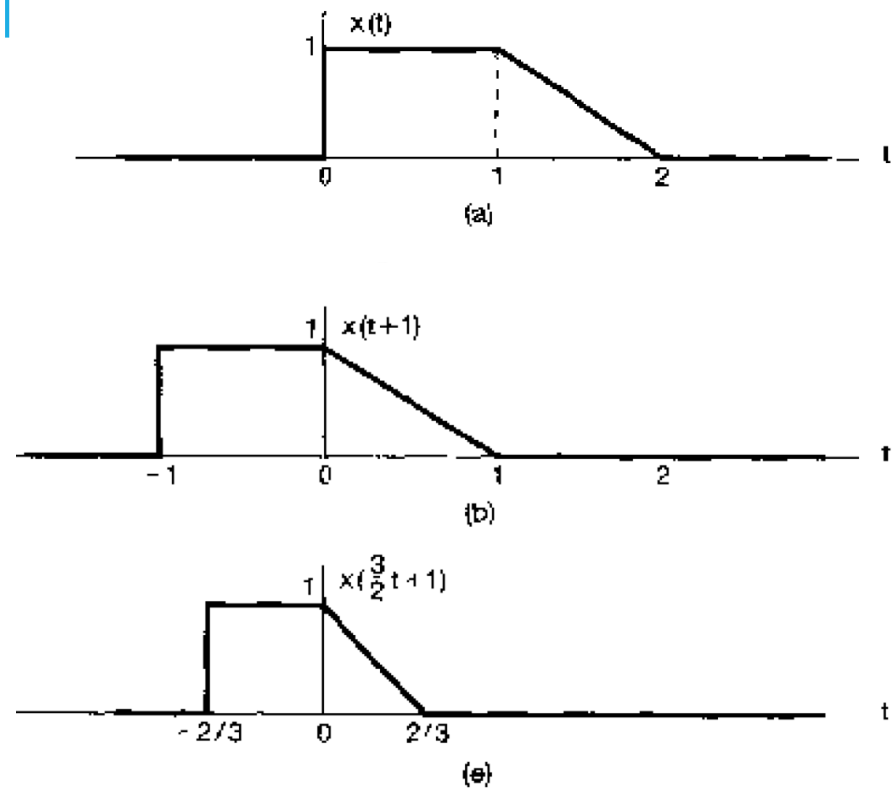
- $|a| > ۱$ به معنای $y(t)$ فشردهٔ (قبض) سیگنال $x(t)$
- $|a| < ۱$ به معنای $y(t)$ گستردهٔ (بسط) سیگنال $x(t)$
- $a < 0$ نیاز به انعکاس زمانی پس از تغییر مقیاس

- عدم تغییر ماهیت سیگنال در زمان‌پیوسته
- تغییر ماهیت سیگنال در زمان‌گسسته

مثال



مثال



رسم سیگنال

پیوسته

- $y(t) = x(\alpha t - \beta)$

$$x(t) \rightarrow v(t) = x(t - \beta)$$

$$v(t) \rightarrow y(t) = v(\alpha t) = x(\alpha x - \beta)$$

گسسته

- $y[n] = x[kn - n_0]$

$$x[n] \rightarrow v[n] = x[n - n_0]$$

$$v[n] \rightarrow y[n] = v[k] = x[kn - n_0]$$

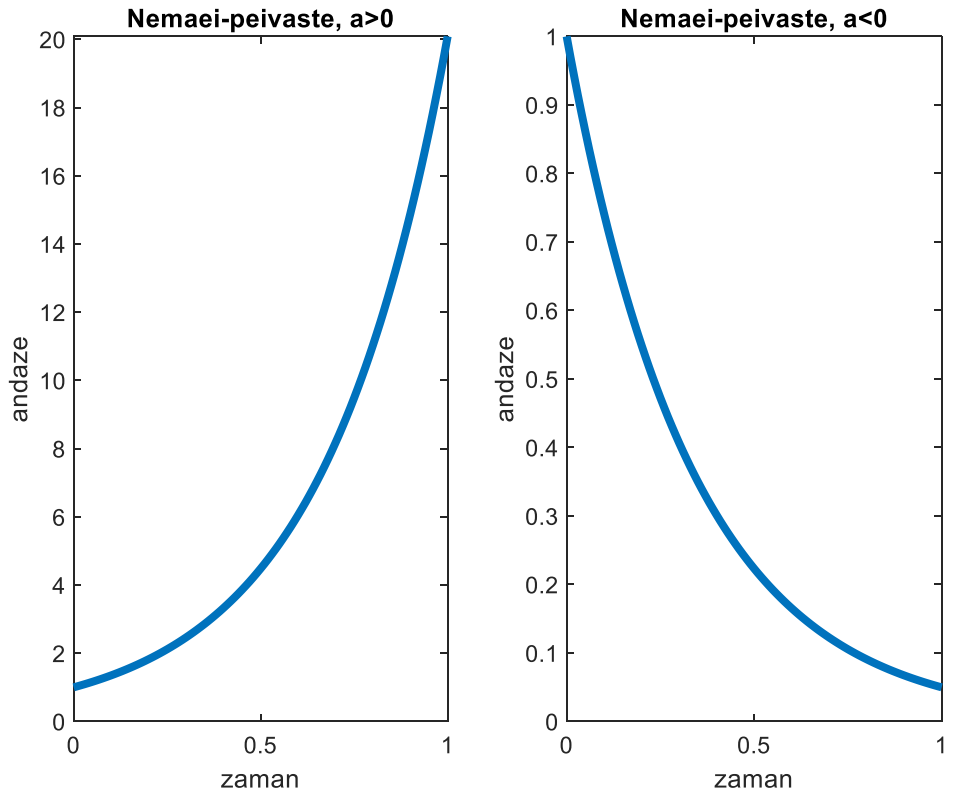
سیگنال‌های مهم

- مشاهدهٔ فراوان چنین سیگنال‌هائی
- تدوین سیگنال‌های پیچیده‌تر از چنین سیگنال‌هائی

نمائی $x(t) = \beta e^{at}$

نمائی حقیقی

پیوسته $x(t) = \beta e^{at}$



نمائی مختلط

پیوسته $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

- متناوب

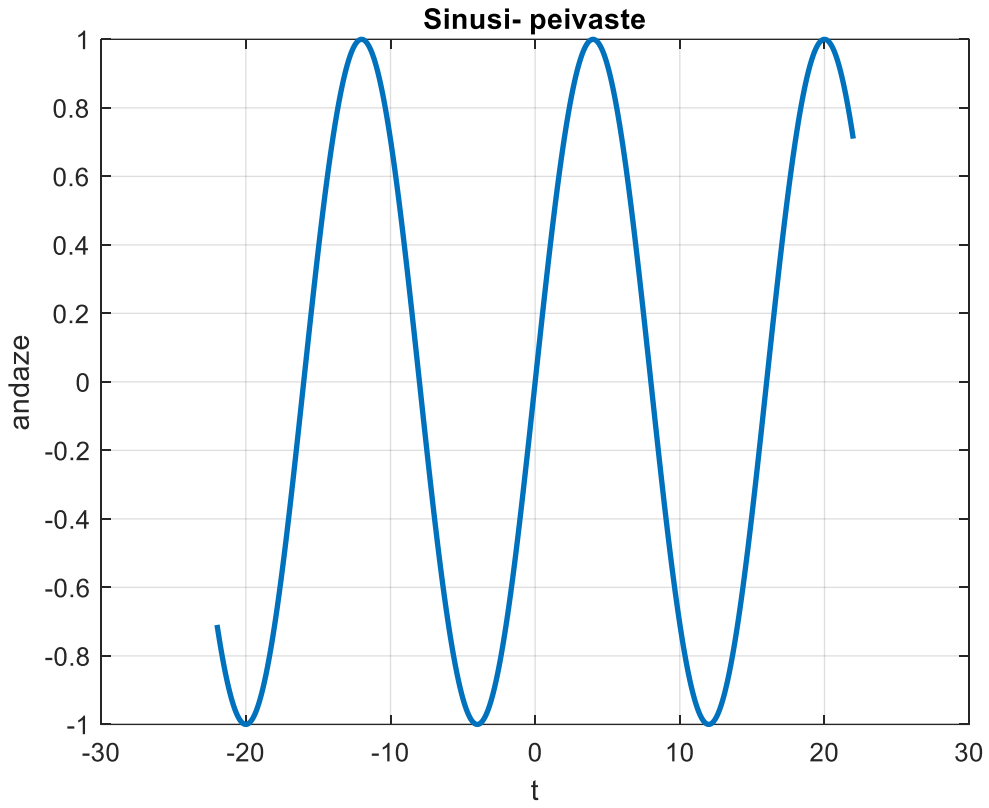
نمائی مختلط

گسسته $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

- متناوب

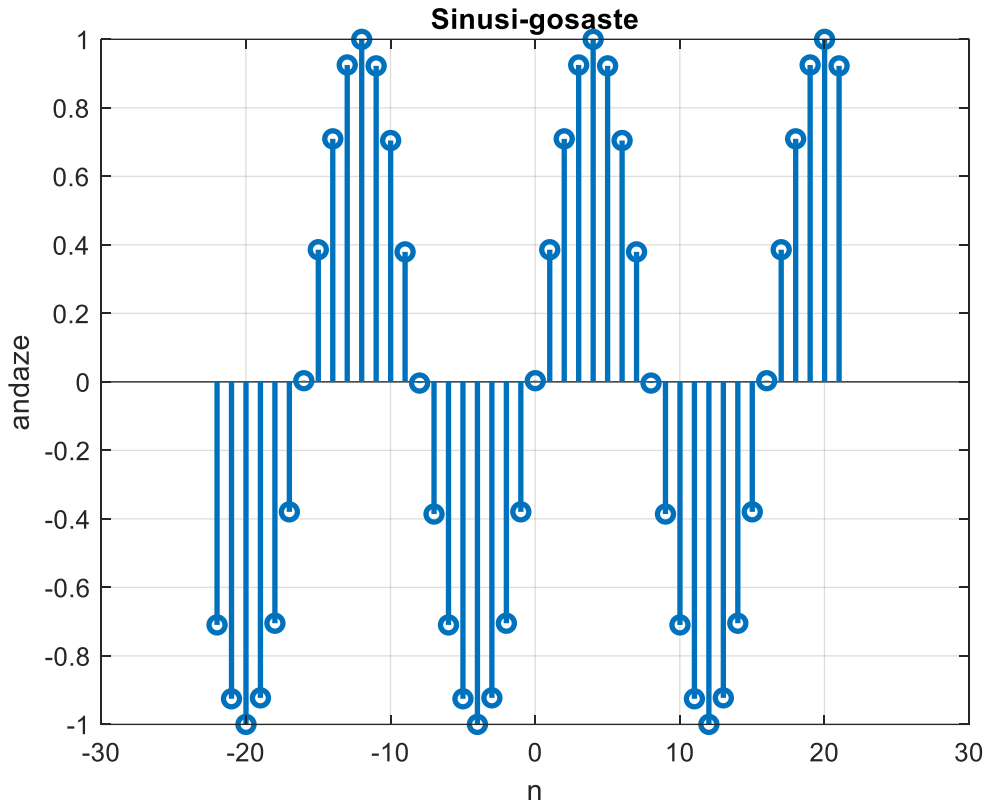
سیگنال سینوسی

پیوسته



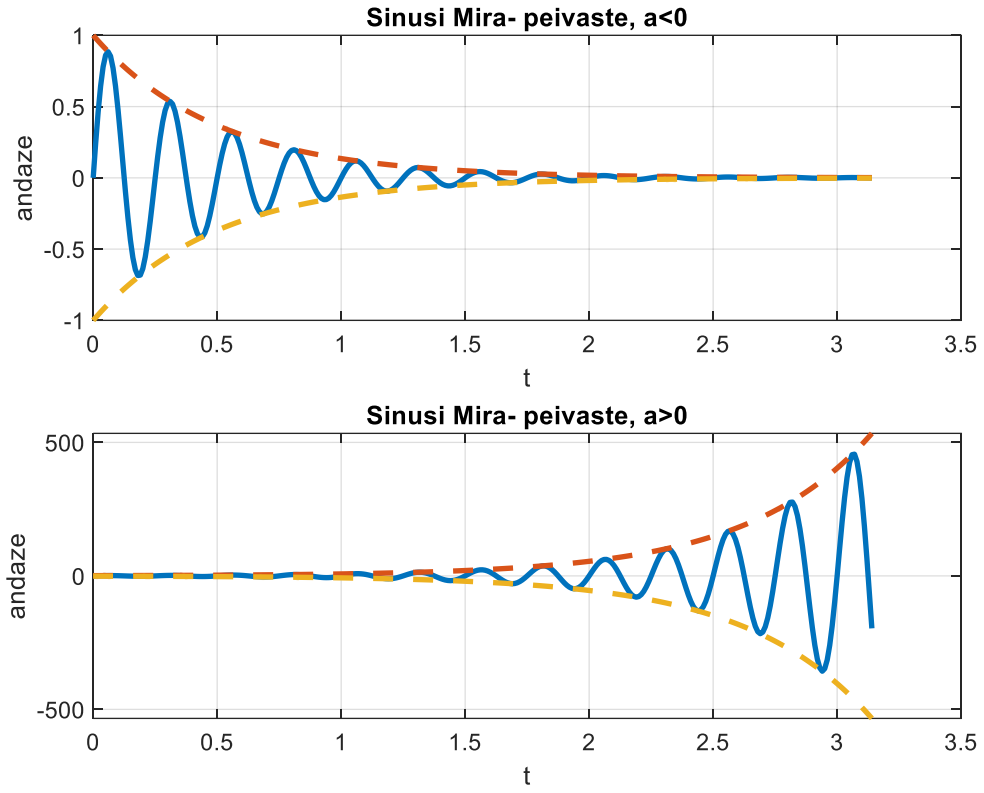
سیگنال سینوسی

گسسته



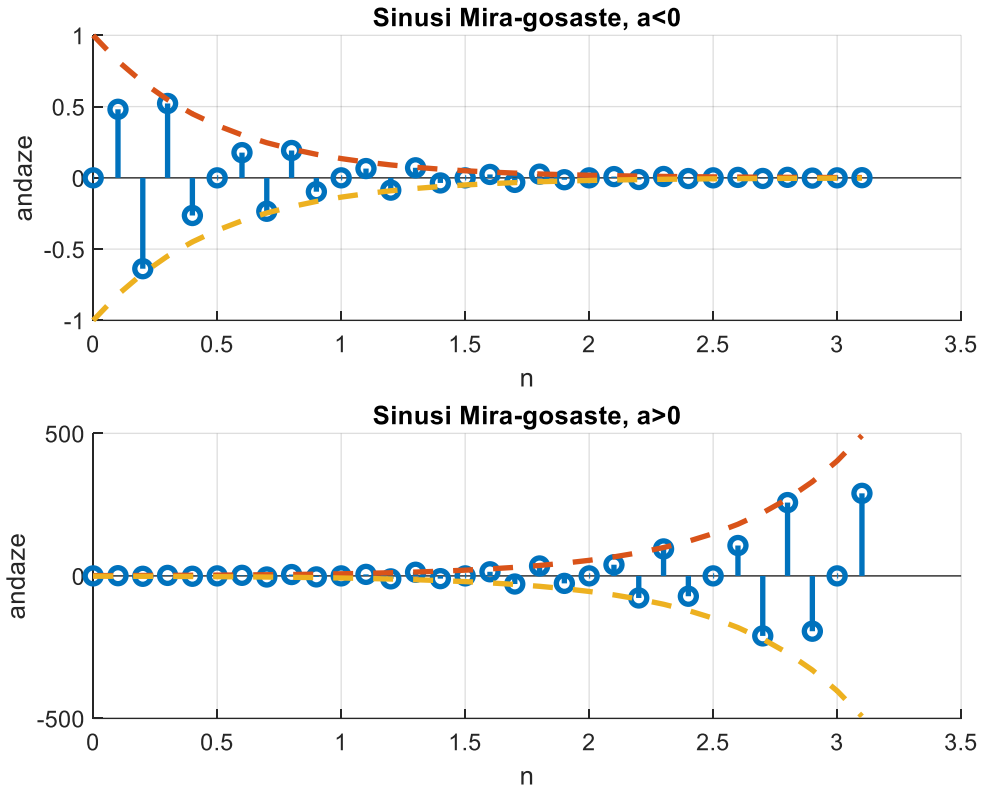
سیگنال سینوسی میراشونده

پیوسته

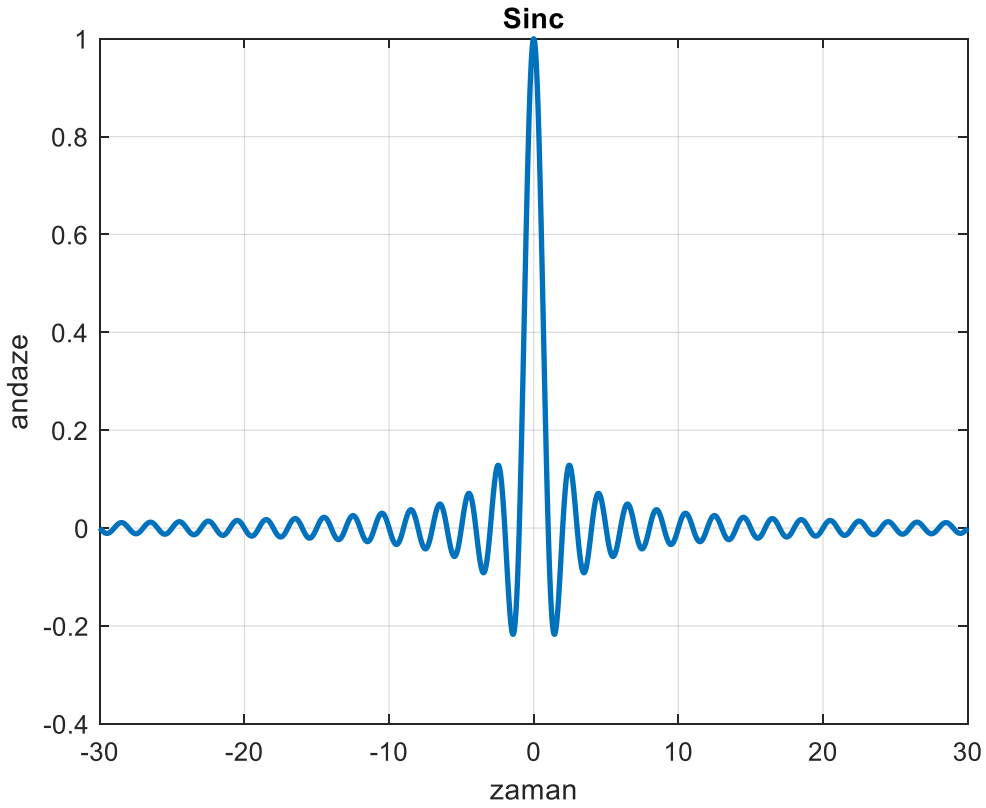


سیگنال سینوسی میراشونده

گسسته



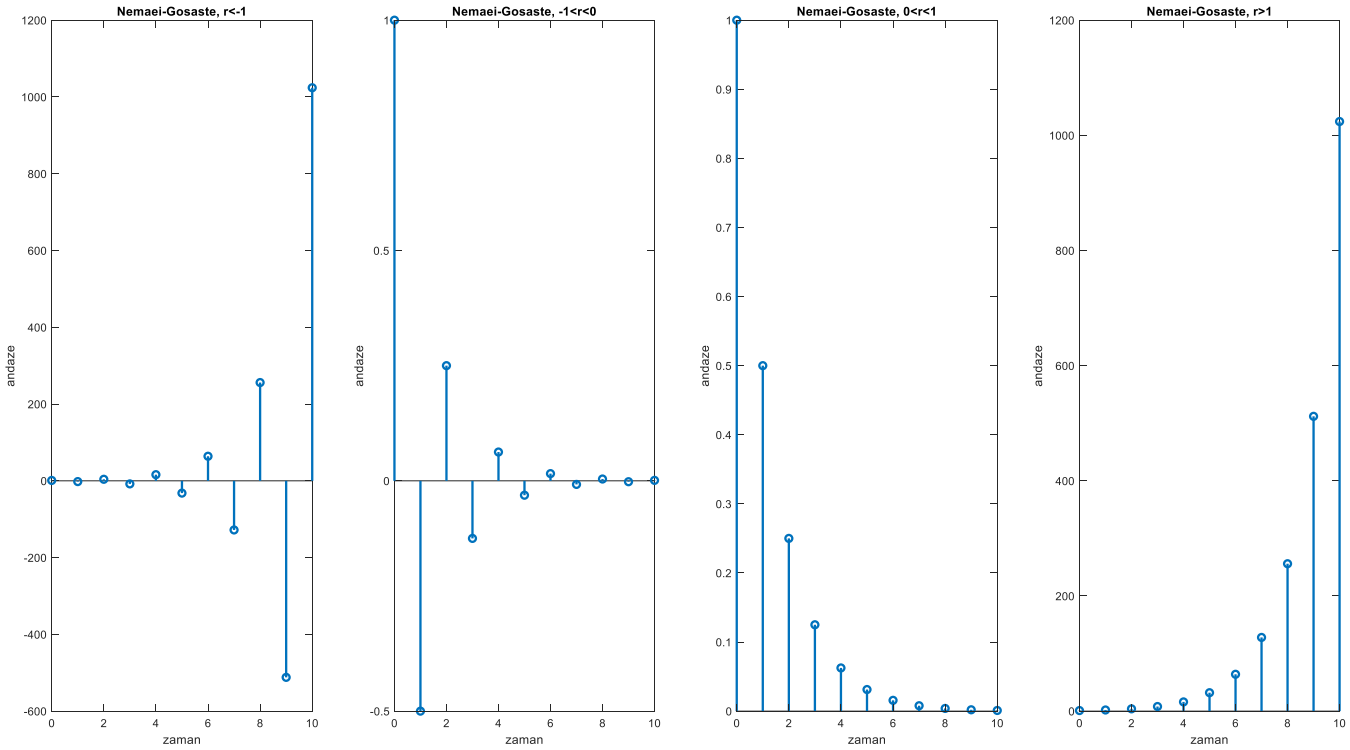
تابع سینک



نمائی

گسسته $x[n] = \beta r^n$

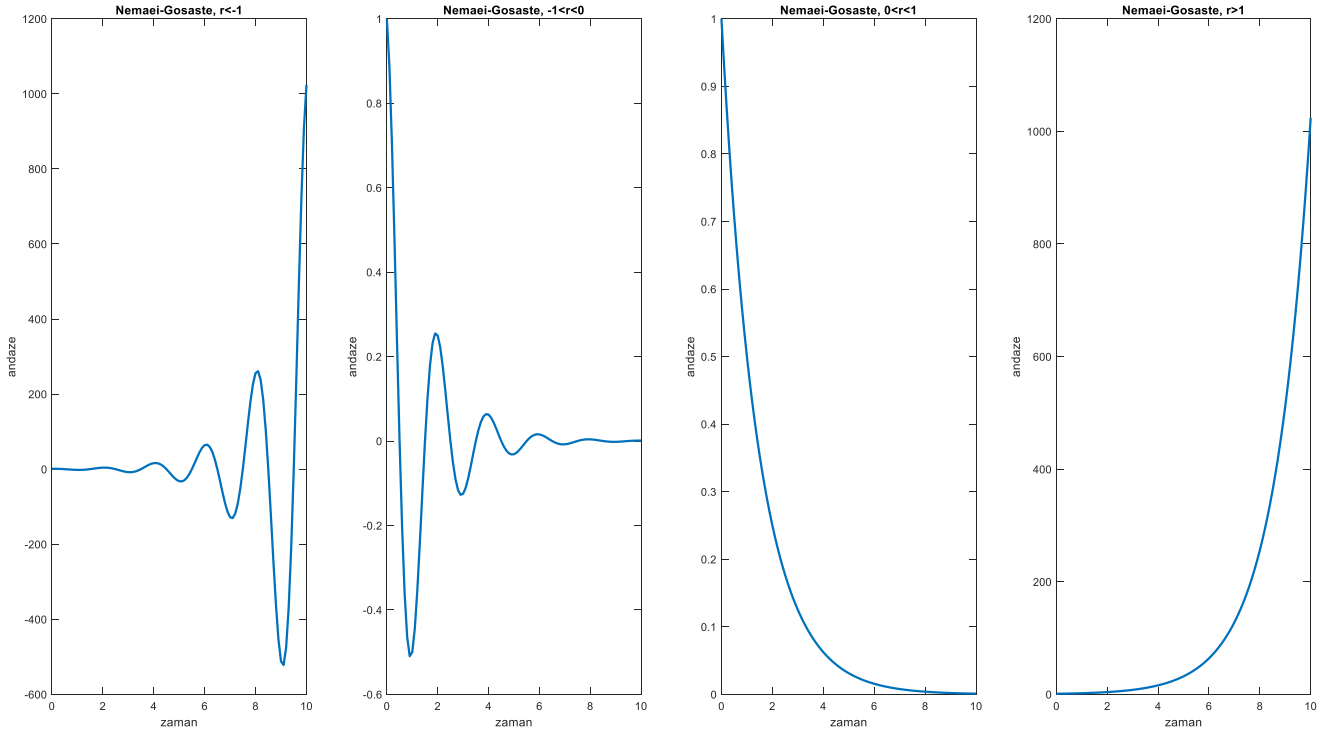
- شامل چهار حالت
  - افزایشی
  - کاهشی
  - نوسانی افزایشی
  - نوسانی کاهشی



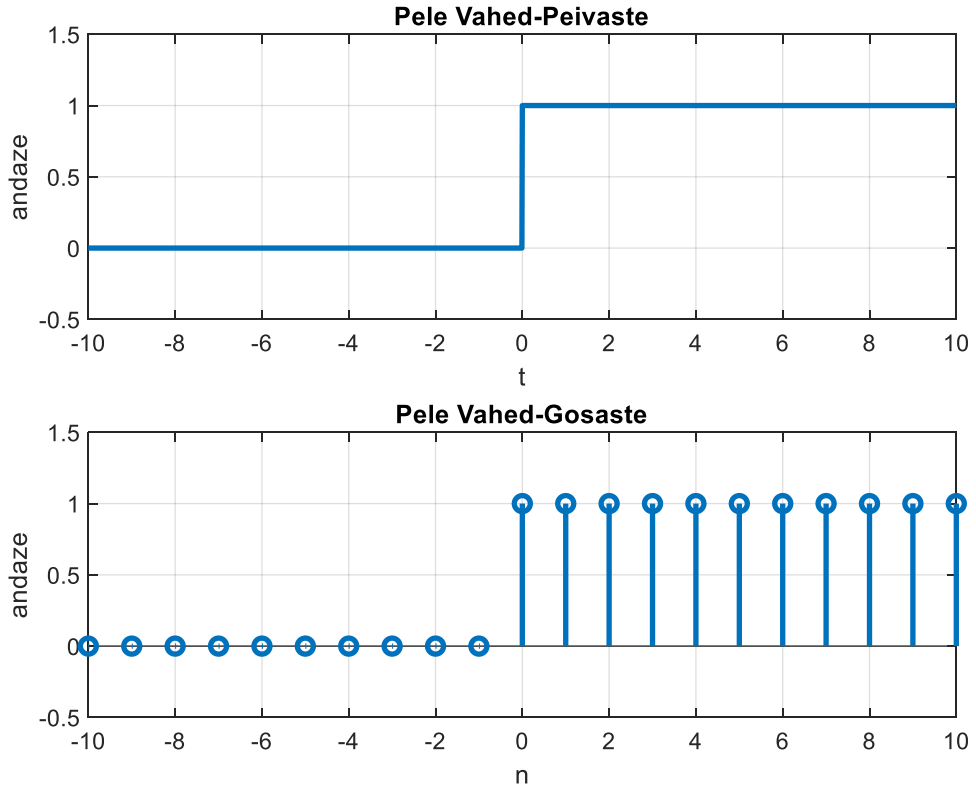
نمائی

پیوسته $x[n] = \beta r^n$

- شامل چهار حالت
  - افزایشی
  - کاهشی
  - نوسانی افزایشی
  - نوسانی کاهشی



تابه پله واحد



تابه پله واحد

مثال و کار با تابع پله

تابع ضربه

پیوسته

تابع ضربه- پیوسته، خواص

امکان بیان توابع چند ضابطه‌ای با یک ضابطه

خاصیت غربالی تابع ضربه

انتگرال کانوولوشن

زوج

تابع ضربه

گسسته

تابع ضربه- پیوسته، خواص

خاصیت غربالی تابع ضربه

انتگرال کانوولوشن

زوج

تابع شیب

تابع دوپلت واحد

تابع دوپلت واحد-خواص

توابع ویژه

تابع پله واحد

- پیوسته
- گسسته

تابع ضربه

- خواص
  - بیان توابع چند بخشی
  - غربال‌گری
  - کانولوشن
  - زوجی

تابع شیب

- پیوسته
- گسسته

تابع دوبلت واحد

منابع